Métodos Analíticos en Estadística - Curso 2007/08
Métodos numéricos para Estadística
TEMA 6: APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS
Problemas

1. Probar que si una sucesión de funciones en $C[a,b]$ converge en norma uniforme, también converge según la norma $\|\cdot\|_{2,w}$, para una función peso $w(x)$ en $[a,b]$. Demostrar que el recíproco no es cierto.

   (*Sugerencia*: usar la sucesión $f_n(x) = \left(\dfrac{n}{1+n^4x^2}\right)^{1/2}$ con $w(x) \equiv 1$ en $[-1,1]$.)

2. Calcular
$$\min_{p\in\Pi_n} \left(\int_1^2 (f(x)-p(x))^2\,dx\right)^{1/2},$$
   para $f(x) = \ln x$.

3. Ídem para $f(x) = e^x$.

4. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} \in \mathcal{C}([-1,1])$ en Π_2 si en $C([-1,1])$ consideramos el producto interior:

   (a) $< f,g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$.

   (b) $< f,g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

   En ambos caso determinar la desviación mínima.

5. La forma bilineal
$$< f,\, g >= \int_0^\infty f(t)g(t)\,(t+2)e^{-t}dt$$
   define un producto escalar en el espacio V de las funciones $f \in C([0,\infty))$ tales que $< f,f >< +\infty$.

   (a) Hallar los cuatro primeros polinomios ortogonales mónicos respecto a $< \cdot,\cdot >$.

   (b) Dada la función $f(t) = t^2e^{-t}$, hallar la mejor aproximación mínimo cuadrática a f en Π_3.

   (c) ¿Se puede realizar el apartado (b) para la función $f(t) = te^{\frac{t}{2}}$?.

6. Si denotamos por $\hat{\Pi}_n$ al conjunto de todos los polinomios mónicos de grado n. Y $\pi_n(\cdot;\omega)$ es el n-ésimo polinomio ortogonal mónico asociado a la función peso ω en $[a,b]$. Demostrar que
$$\int_a^b \pi_n^2(t)\,\omega(t)\,dt \le \int_a^b p^2(t)\,\omega(t)\,dt \quad , \quad p \in \hat{\Pi}_n.$$
   Lo que quiere decir que el n-ésimo polinomio ortogonal mónico es el de norma mínima.

7. ¿Cúal es la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(t) = 0$ en $[a,b]$ en el conjunto de los polinomios de grado n mónicos con la norma $\|\cdot\|_{2,\omega}$?, ¿ y en Π_n ?.

8. Los polinomios de Tchebyshev de segunda especie se definen para $t \in [-1,1]$ como :
$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad , \quad t = \cos\theta \quad , \quad \theta \in [0,\pi]$$

(a) Demostrar que se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad U_0(t) = 1 \, , \;\; U_1(t) = 2t \; .$$

En particular, U_n es un polinomio de grado n.

(b) Demostrar que para $n \geq 0$ el polinomio U_n tiene la misma paridad que el subíndice n. Hallar las raíces de U_n. Probar la siguiente relación con los polinomios de Tchebyshev T_n.

$$T_n^{'}(t) = nU_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 \; .$$

(c) Demostrar que

$$\int_{-1}^{1} U_n(t) \cdot U_m(t) \sqrt{1-t^2} \, dt = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad .$$

¿Se puede decir que $\{U_n\}_{n \in I\!N}$ forman una sucesión de polinomios ortogonales mónicos ?. Obtener una base ortonormal de Π_n con respecto al producto escalar

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t) \, \sqrt{1-t^2} \, dt.$$

9. Hallar la expresión de los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx \, .$$

10. Probar que los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$, $n \geq 0$ son ortogonales respecto de la función peso $1/\sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$.

11. Los polinomios de Laguerre son los polinomios ortogonales respecto de la función peso $w(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Sabiendo que $L_0(x) = 1$, calcular L_1, L_2 y L_3 por el procedimiento de ortogonalización de Gram-Smith. Usar estos polinomios para calcular el polinomio de mínimos cuadrados de grado ≤ 3 que aproxima a las funciones $f_1(x) = e^{-x/2}$ y $f_2(x) = \sin(x)/x$.

12. Demostrar que los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n \geq 0,$$

son ortonormales respecto la función peso $w(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$.

Sugerencia: Demostrar primero que

$$\frac{d^r}{dx^r}(x_n e^{-x}) = 0, \quad \text{para } x = 0, \infty, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,$$

y usar la integración por partes.

13. Demostrar que los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n], \quad n \geq 1, \qquad P_0(x) \equiv 1,$$

es ortogonal respecto la función peso $w(x) \equiv 1$ en $[-1, 1]$. Calcular también $\| \, P_n \, \|_{2,w}$.

14. Calcular el polinomio de grado ≤ 2 que mejor aproxima a $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$ con norma $\| \cdot \|_2$ $(w(x) \equiv 1)$. Usar primero polinomios ortogonales. Resolver también el problema mediante el cálculo directo.

15. Obtener la mejor aproximación en norma $\| \cdot \|_{2,w}$ de la función $f(x) = xe^x$ mediante polinomios de grado ≤ 2 en [0,2] usando el peso $w(x) = x$. Obtener el error.

16. Demostrar que si $f \in C[a,b]$ y $p_n(x)$ es su mejor aproximación por mínimos cuadrados en Π_n respecto a $w(x)$, entonces $p_n(x)$ interpola a f al menos en $n+1$ puntos de (a,b).

17. Sea $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1,1]$, $(f(x) \in [0,\pi])$.

    (a) Encontrar el polinomio $p_n \in \Pi_n$ que minimiza

    $$\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

    (b) Demostrar que existe $F \in C[-1,1]$ tal que

    $$\lim_{n\to\infty} \| F - p_n \|_\infty = 0.$$

    Comprobar que tiene que ser $F \equiv f$.

    (c) Probar que

    $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

18. En el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ se considera la norma $\| \cdot \|_2$. Si denotamos por $\mathcal{T}_n$ el conjunto de polinomios trigonométricos de grado a lo sumo n.

    (a) Determinar la mejor aproximación en $\mathcal{T}_n$ de la función $f(x) = x$ y la desviación mínima.

    (b) Usando el resultado del apartado anterior demostrar que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}.$

    (c) Repetir el primer apartado para la función $f(x) = |x|$.

    (d) Utilizando los resultados del apartado anterior demostrar que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

19. Sea $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$. Estudiar su serie de Fourier con los polinomios ortogonales de Chebychev de 1 especie $\{T_k\}$.

    (a) Estudiar la convergencia uniforme de la serie de Fourier resultante.

    (b) Demostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

20. Sea $w(x)$ una función peso en $[-a,a]$, $a > 0$, y sea $\{\varphi_n\}_n$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Probar que para cada n, φ_n es una función par/impar según n sea par/impar.

21. Sea $\{T_k\}$ la sucesión de polinomios ortogonales de Chebychev de primera especie. Demostrar que si $f(x)$ es par/impar en $[-1,1]$, entonces los coeficientes de Fourier verifican que $c_k = 0$ si k es impar/par.

22. Sea $f(x) = x^n$. Demostrar que la mejor aproximación a f por mínimos cuadrados en Π_n es la misma f, en cualquier intervalo $[a,b]$ con una función peso $w(x)$.

23. Hallar el polinomio de grado no mayor que 1 mejor aproximación por mínimos cuadrados en los puntos -1, 0, 1/8, de la función $y = x^{1/3}$. Calcular el error.

24. El estiramiento de un resorte obedece a la ley de Hooke

    $$e = e_0 + K \cdot F$$

    donde e_0 es el estiramiento inicial, F la fuerza aplicada y K la constante de elasticidad del resorte. Se han medido los siguientes valores para (F, e): $\{(0, 5.3), (2, 7.0), (4, 9.4), (6, 12.3)\}$, donde F se mide en Newtons y la distancia en cms. Calcular la constante de elasticidad del resorte.

25. Deducir la ecuación de la recta de regresión (Y sobre X) para un conjunto de N datos $\{(x_k, y_k),\ k = 1, 2, \ldots, N\}$.

26. Considérense los datos de la siguiente tabla:

x	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
$f(x)$	2.2	3.5	4.0	6.0	6.5	7.3	8.2	8.7

Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima estos datos. Calcular el error cuadrático y comparar con el ajuste lineal.

27. Construir los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales usando el producto escalar

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(\frac{1}{2})g(\frac{1}{2}) + f(1)g(1).$$

28. Comprobar que las funciones $1,\ \cos(x),\ \sin(x)$ son ortogonales respecto del producto escalar

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k)g(x_k)$$

con $x_k = k\pi/2$. Como aplicación, hallar en el conjunto de los polinomios trigonométricos $a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$ el que más se aproxima a $y = x$ en el sentido de los mínimos cuadrados en los puntos $x_k = k\pi/2,\ k = 1, 2, 3, 4$.