Métodos Analíticos en Estadística
TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS

Teorema 1 *(Teorema de aproximación de Weierstrass)*
Sea $f \in C[a,b]$ y cualquier $\epsilon > 0$. Existe un polinomio $p(x)$ de tal forma que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

Previamente a la demostración hay que definir los llamados *operadores monótonos* y probar otro teorema.

Dado un operador lineal

$$L : C[a,b] \longrightarrow C[a,b], \qquad Lf \in C[a,b], \forall f \in C[a,b],$$

se dice que es un *operador lineal monótono* sii verifica

$$\text{si } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow Lf(x) \leq Lg(x), \forall x \in [a,b],$$

lo que denotamos como

$$f \leq g \Rightarrow L_n f \leq L_n g.$$

Teorema 2 *Para cualquier sucesión de operadores lineales monótonos $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $C[a,b]$ las siguientes sentencias son equivalentes:*

(i) $L_n f \to f$ *(uniformemente) para toda* $f \in C[a,b]$.

(ii) $L_n f \to f$ *(uniformemente) para las tres funciones* $f(x) = 1, x, x^2$.

(iii) $L_n 1 \to 1$ *y* $(L_n \phi_t)(t) \to 0$ *uniformemente para todo* $t \in [a,b]$*, donde* $\phi_t(x) = (t-x)^2$.

DEMOSTRACIÓN TEOREMA 2: La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es trivial.

Para demostrar que $(ii) \Rightarrow (iii)$ se denota $f_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$. Para cada $t \in [a,b]$ arbitrario pero fijo,

$$\phi_t(x) = (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 = t^2 f_0(x) - 2t f_1(x) + f_2(x).$$

Por tanto,

$$L_n \phi_t(x) = t^2 L_n f_0(x) - 2t L_n f_1(x) + L_n f_2(x).$$

Demostrar que

$$\| L_n \phi_t \|_\infty \leq C_0 \| L_n f_0 - f_0 \|_\infty + C_1 \| L_n f_1 - f_1 \|_\infty + \| L_n f_2 - f_2 \|_\infty \longrightarrow 0$$

Sugerencia: evaluar el caso $x = t$.

Para probar que $(iii) \Rightarrow (i)$ se coge una función arbitraria $f \in C[a,b]$, que será uniformemente continua, esto es,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Denotamos por

$$\alpha = 2\frac{\| f \|_\infty}{\delta^2}$$

y elegimos un punto $t \in [a,b]$ arbitrario pero fijo.

Aplicando la continuidad uniforme demostrar que para todo $x \in [a,b]$

$$|f(t) - f(x)| \leq \epsilon + \alpha \phi_t(x).$$

Para expresar esto en forma funcional, definimos $f_0(x) = 1$, y así tenemos que (recuérdese que t está fijo)

$$-\epsilon f_0 - \alpha \phi_t \leq f(t) f_0 - f \leq \epsilon f_0 + \alpha \phi_t,$$

por lo que podemos aplicar que los operadores L_n son monótonos:

$$-\epsilon L_n f_0 - \alpha L_n \phi_t \leq f(t) L_n f_0 - L_n f \leq \epsilon L_n f_0 + \alpha L_n \phi_t.$$

Demostrar a partir de aquí que

$$|f(t) - (L_n f)(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente en } t \in [a, b]$$

$\square$

Demostración Teorema 1: Demostrar que podemos suponer sin pérdida de generalidad que estamos en el intervalo $[0, 1]$.

Para cada $f \in C[0, 1]$ se define la *sucesión de polinomios de Bernstein* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ dados por

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{1}$$

Demostrar que esta fórmula (1) define una sucesión de operadores lineales monótonos en $C[0, 1]$.
Por tanto, verifica el Teorema 2.
Demostrar que $B_n f \longrightarrow f$ para $f = 1, x, x^2$ con lo que tendríamos demostrado el teorema.
Sugerencia: Para $f(x) = x^2$ usar que

$$\frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n}.$$