Métodos Analíticos en Estadística
Métodos numéricos para Estadística
TEMA 5: INTERPOLACIÓN

Interpolación: interpolar es seleccionar una función $p(x)$ de entre una clase de funciones de tal forma que la gráfica de $y = p(x)$ pase por un conjunto finito de puntos dados.

Es decir, dados $n+1$ puntos distintos

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

se busca una función $p(x)$ tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Dependiendo de la clase de funciones en la que busquemos $p(x)$ tendremos los distintos tipos de interpolación:

- Si $p(x)$ es un polinomio: *interpolación polinómica.*
- Si $p(x)$ es un polinomio a trozos: *interpolación por splines.*
- Si $p(x)$ es un polinomio trigonométrico ($p(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)$): *interpolación trigonométrica.*
- Si $p(x)$ es un cociente de polinomios ($p(x) = r(x)/q(x)$): *interpolación racional.*

En este curso veremos en detalle el primer caso, estudiando de forma más superficial el segundo y el tercero. El caso de la interpolación racional se deja para otros cursos más avanzados.

1 Interpolación polinómica

Antes de entrar en materia introducimos la siguiente notación:

$$\Pi_n = \{p(x) \text{ polinomio de grado } \leq n\},$$

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f \text{ es continua en } [a,b]\},$$

$$\| f \|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Teorema 1.1 *(Teorema de existencia y unicidad)*

Dados $n+1$ puntos distintos entre sí $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $n+1$ ordenadas $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un polinomio $p_n(x)$ de grado menor o gual a n tal que

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Además, este polinomio $p_n(x)$ es único en la clase de polinomios de grado menor o igual a n (Π_n).

DEMOSTRACIÓN: Queremos encontrar un polinomio $p_n(x) \in \Pi_n$, por lo que tiene que ser de la forma

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

Y queremos que verifique (1.1). Por tanto, tiene que cumplir:

$$\begin{array}{l}
a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1 \\
\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n
\end{array}$$

Esto claramente es un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, cuya matriz de coeficientes tiene como determinante

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Este tipo de determinantes se llama *determinantes de Vandermonde.* Aparecen a menudo cuando trabajamos en cálculo numérico.

Ejercicio: Demostrar que

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Como en nuestro caso $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, no se anula ninguno de los factores del determinante y, por tanto,

$$\det(V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)) \neq 0$$

y el sistema lineal tiene solución y es única $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$. Así que existe $p_n(x) \in \Pi_n$ tal que se cumple (1.1) y además, es único en Π_n. $\square$

Observaciones:

- Los $n+1$ puntos distintos entre sí $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se llaman *nodos de interpolación.*
- Una de las principales utilidades del polinomio de interpolación aparece cuando las ordenadas y_i son valores de una función $f(x)$ en los nodos x_i, es decir, cuando buscamos un polinomio $p_n(x; f) \in \Pi_n$ tal que
$$p_n(x_i; f) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$
En este caso se dice que $p_n(x; f)$ es el *polinomio de interpolación de $f(x)$ en los nodos* $\{x_i\}_{i=0}^n$. Veremos que, bajo ciertas condiciones, $p_n(x; f)$ será una buena aproximación a $f(x)$.
- Obsérvese que en este teorema no se especifica si los nodos x_i o las ordenadas y_i son reales o complejas, pues es un teorema válido cuando $\{x_i, y_i\} \in \mathbf{C}$, en cuyo caso el polinomio $p_n(x)$ tendrá coeficientes complejos $a_i \in \mathbf{C}$. Esta observación tendrá relevancia cuando estudiemos la interpolación mediante polinomios trigonométricos.

1.1 Fórmula de Lagrange

El teorema 1.1 nos asegura que $p_n(x)$ existe y es único, pero la forma en que lo construye es muy compleja de aplicar en la práctica. Hay diversas maneras de expresar este polinomio. Según el contexto será más apropiado usar una u otra. La más usual es la de Lagrange:

Definición 1.1 *Dados $n+1$ nodos distintos entre sí $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, se definen los* **polinomios fundamentales de Lagrange** *como*

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \in \Pi_n, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Estos polinomios tienen la siguiente propiedad:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

Para simplificar la notación posterior introducimos la función *delta de Kronecker*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.4}$$

Así se expresan de forma más compacta las propiedades de los polinomios fundamentales de Lagrange (1.3):

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Teorema 1.2 *(Polinomio de interpolación de Lagrange)*
Dados $n+1$ nodos distintos entre sí $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, y $n+1$ ordenadas $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, el polinomio de interpolación $p_n(x)$ dado en el Teorema 1.1 se puede expresar en función de los polinomios fundamentales de Lagrange como

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Demostración: Consideremos el polinomio

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \in \Pi_n.$$

Claramente verifica las condiciones de interpolación (1.1) por la propiedad (1.3) anterior:

$$q(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_j) = y_j l_j(x_j) = y_j = p_n(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Concluimos la demostración por la unicidad del polinomio de interpolación en Π_n. □

Ejemplos:

$$\begin{aligned} p_0(x) = &\quad y_0 \\ p_1(x) = &\quad \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\ p_2(x) = &\quad \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \end{aligned}$$

Existe una manera alternativa de expresar el polinomio de interpolación de Lagrange usando el llamado *polinomio nodal*:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \tag{1.5}$$

Observando que

$$w'(x_i) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

se tiene

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i) w'(x_i)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Observaciones:

- Si las ordenadas y_i son valores de una función $f(x)$, se tiene que el polinomio de interpolación de $f(x)$ en los $n+1$ nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$ con $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, se expresa como:

$$p_n(x;f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x). \tag{1.7}$$

- $\{l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)\}$ forman una base en Π_n, es decir, cualquier $p(x) \in \Pi_n$ se puede expresar de forma unívoca como
$$p(x) = \alpha_0 l_0(x) + \alpha_1 l_1(x) + \cdots + \alpha_n l_n(x).$$
Su demostración se deja como ejercicio.

1.2 Error de interpolación

Como ya hemos visto, en la práctica es muy útil interpolar una función $f(x)$ a partir de los valores que toma en $n+1$ nodos distintos entre sí $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ según la fórmula (1.7). La idea es que como $f(x)$ y $p_n(x;f)$ coinciden en los $n+1$ nodos, al menos cerca de ellos serán dos funciones muy parecidas y se podrá tomar $p_n(x;f)$ como una buena aproximación de $f(x)$. El siguiente teorema nos dice cómo medir el error cometido en este caso:

Teorema 1.3 *Sean $\{x_i\}_{i=0}^n$ $n+1$ números reales distintos entre sí en un intervalo $[a,b]$ y sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ existe un número $\xi_x \in (a,b)$ tal que el error*

$$E_n(x;f) := f(x) - p_n(x;f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w(x) \tag{1.8}$$

donde $w(x)$ es el polinomio nodal.

Observaciones:

- El teorema nos viene a decir que si el valor x no está lejos de los nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$, con lo que $|w(x)|$ está controlado, y si la función tiene una derivada $(n+1)-$ésima acotada, el error cometido al tomar $p_n(x;f)$ como aproximación a $f(x)$ va a ser pequeño.

- Hay enunciados alternativos de este teorema que en lugar de usar un intervalo $[a,b]$ toman el intervalo más práctico $[\min\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}]$.

1.3 Fórmula de Newton con diferencias divididas

La fórmula de Lagrange se usa mucho cuando abordamos el problema de la interpolación desde el punto de vista teórico. Pero en la computación, sobre todo cuando estamos interpolando funciones, tiene un inconveniente importante: si añadimos un nodo al problema tenemos que calcularlo todo de nuevo, es decir, que para calcular el polinomio de interpolación en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ no podemos aprovechar los cálculos realizados para el polinomio de interpolación en $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Para simplificar la notación en lo que sigue vamos a suponer siempre que estamos interpolando una función f $(y_i = f(x_i))$, por lo que obviaremos la f en la definición del polinomio interpolador, es decir, denotaremos $p_n(x) = p_n(x;f)$.

Veamos una formulación alternativa que permite expresar $p_n(x)$ como

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C_n(x). \tag{1.9}$$

Como $p_n \in \Pi_n, p_{n-1} \in \Pi_{n-1}$, C_n tiene que ser un polinomio de grado menor o igual a n. Pero además sabemos que por las propiedades de interpolación:

$$C_n(x_i) = p_n(x_i) - p_{n-1}(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Por tanto es un polinomio de grado a lo sumo n con n raíces reales distintas, con lo que va a tener que descomponerse como

$$C_n(x) = A_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \tag{1.10}$$

donde A_n es el coeficiente director del polinomio C_n que tenemos que determinar (que a la vez coincide con el coeficiente director de $p_n(x)$).

Para calcular este coeficiente director tenemos que introducir previemante la siguiente definición:

Definición 1.2 *Dados $n+1$ nodos distintos $\{x_i\}_{i=0}^n$ y una función $f(x)$, se definen las* **diferencias divididas** *de f como*

$$\begin{aligned}
&f[x_0] = f(x_0)\\
&f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\\
&f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}\\
&f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}\\
&\vdots\\
&f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Así tenemos el teorema que nos da el coeficiente A_n y nos aporta la expresión de Newton del polinomio de interpolación de una función f:

Teorema 1.4 *(Polinomio de interpolación de Newton)*

Dados $n+1$ nodos distintos $\{x_i\}_{i=0}^n$, el polinomio de interpolación de una función f en dichos puntos se puede expresar como

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{1.12}$$

Con esta propiedad podremos ir calculando el polinomio de interpolación de manera recursiva:

$$\begin{aligned}
p_0(x) = {} & f[x_0]\\
p_1(x) = {} & p_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)\\
p_2(x) = {} & p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)\\
& + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\\
\vdots \quad &\\
p_n(x) = {} & p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\\
= {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots\\
& + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Aunque a primera vista no lo parezca, la computación de esta fórmula es mucho menos costosa que la de la expresión de Lagrange. Lo que más complejo parece es la computación de las diferencias divididas, pero en la práctica resulta muy sencillo usando las llamadas *tablas de diferencias divididas* (lo veremos en las clases prácticas):

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	f_0		
		$f[x_0, x_1]$	
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$ ...
		$f[x_1, x_2]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$ ...
		$f[x_2, x_3]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$ ...
		$f[x_3, x_4]$	
x_4	f_4		$f[x_3, x_4, x_5]$ ...
		$f[x_4, x_5]$	
x_5	f_5		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Por otra parte, las diferencias divididas nos van a da una expresión alternativa del error de interpolación que es muy útil:

Corolario 1.1 *Sean $\{x_i\}_{i=0}^n$ $n+1$ números reales distintos entre sí en un intervalo $[a,b]$ y sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ el error de interpolación viene dado por*

$$E_n(x; f) := f(x) - p_n(x) = w(x) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \tag{1.14}$$

donde $w(x)$ es el polinomio nodal.

Simplemente comparando las dos expresiones del error (1.8) y (1.14), podemos concluir que para cada $x \in [a,b]$ existirá un $\xi_x \in (a,b)$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Incluso generalizando esta igualdad para el caso $x = x_{n+1} = x_m$ se obtiene la fórmula más general:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \text{ para cierto } \xi \in [\min\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}, \max\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}]. \tag{1.15}$$

2 Interpolación de Hermite

En muchas aplicaciones es conveniente encontrar un polinomio $p(x)$ que no sólo interpole a una función $f(x)$ en un cierto número de puntos, sino que además interpole a su derivada $f'(x)$. Esto no sólo se usará para aproximar $f(x)$, sino que tiene aplicaciones cuando aproximamos integrales o resolvemos ecuaciones diferenciales numéricamente.

El *problema de interpolación de Hermite general* consiste en encontrar un polinomio $p(x)$ de tal manera que

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

O sea, que p y f coincidan en un cierto número de nodos distintos y sus derivadas hasta cierto orden.

Obsérvese que el número de nodos distintos (n) y el número de derivadas (m_i) no son independientes. En cada nodo x_i, p y f coincidirán hasta un determinado orden de derivación m_i.

Se tiene el teorema general:

Teorema 2.1 *(Teorema de existencia y unicidad)*

Dados $n+1$ nodos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in [a,b]$, los enteros no-negativos $\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$ y una función $f \in C^m[a,b]$ donde $m = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$, existe un único $p \in \Pi_N$ que verifica (2.1), siendo

$$N = \sum_{i=0}^{n} m_i + n.$$

Observaciones:

- En el caso $n = 0$, es decir, la interpolación en un sólo nodo x_0 en sus derivadas hasta orden m_0, este polinomio realmente es el polinomio de Taylor de grado $N = m_0$ de la función $f(x)$:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m_0)}(x_0)}{m_0!}(x - x_0)^{m_0}.$$

- En el caso de $n + 1$ nodos distintos $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ con $m_i = 0, \forall 0 \leq i \leq n$, es decir, la interpolación en $n + 1$ nodos solamente de la función $f(x)$ sin las derivadas sucesivas, tenemos el polinomio de interpolación ordinario de grado n (1.1).

El caso más usado de este tipo de interpolación generalizado es el caso en que $m_i = 1, \forall 0 \leq i \leq n$. Así se define el *polinomio de interpolación de Hermite* como el único polinomio $H_{2n+1} \in \Pi_{2n+1}$ que interpola a f y a f' en $n + 1$ nodos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, esto es,

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Vamos a estudiar cómo se formula este polinomio. La primera formulación se deduce utilizando los polinomios fundamentales de Lagrange (1.2).

Teorema 2.2 *Si $f \in C^1[a, b]$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ son distintos, el único polinomio de menor grado que verifica (2.2) es $H_{2n+1} \in \Pi_{2n+1}$ dado por*

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)B_i(x), \tag{2.3}$$

donde $A_i, B_i \in \Pi_{2n+1}$ vienen dados en función de los polinomios fundamentales de Lagrange de grado n $l_i(x)$ (1.2) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} A_i(x) &= (1 - 2(x - x_i)l'_i(x_i))l_i^2(x) \\ B_i(x) &= (x - x_i)l_i^2(x). \end{aligned}$$

Además, si $f \in C^{2n+2}[a, b]$ entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un $\xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n + 2)!}w^2(x). \tag{2.4}$$

De la misma forma que en el caso de la interpolación ordinaria, esta formulación del polinomio de Hermite no resulta ser muy aplicable en la computación y se busca otra fórmula usando diferencias divididas. Para ello, se considera la fórmula de Newton de un polinomio de interpolación en $2n+2$ nodos distintos $\{z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}\}$ que como ya hemos visto se representa como

$$p_{2n+1}(x) = f[z_0] + f[z_0, z_1](x - z_0) + \cdots + f[z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}](x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{2n}), \tag{2.5}$$

cuyo error viene dado también en función de las diferencias divididas como

$$f(x) - p_{2n+1}(x) = f[z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}, x](x - z_0)(x - z_1)\cdots(z - z_{2n+1}).$$

Si en esta fórmula (2.5) dejamos que los nodos que aparecen se repitan sustituyendo

$$z_0, z_1 \text{ por } x_0, x_0, \quad z_2, z_3 \text{ por } x_1, x_1, \quad \ldots, z_{2n}, z_{2n+1} \text{ por } x_n, x_n,$$

y tenemos en cuenta de la relación (1.15) que

$$f[x_i, x_i] = \frac{f'(x_i)}{1!}$$

se llega al siguiente teorema:

Teorema 2.3 *(Fórmula de Newton del polinomio de Hermite)*
El polinomio de interpolación de Hermite (2.3) en $n+1$ nodos distintos se puede expresar como

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) = \quad & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) + \dots \\ & + f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Además, si f es suficientemente derivable, el error viene dado por

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]w^2(x).$$

La demostración de este teorema no es sencilla. Para ello hay que ver el Teorema de Hermite–Gennochi, lo que a mi entender no entra dentro de lo que es un curso práctico de cálculo numérico como éste.

El caso más usado de interpolación de Hermite es probablemente el *polinomio cúbico de Hermite*, que interpola en dos nodos $\{a, b\}, a \neq b$:

$$\begin{array}{ll} H_3(a) = f(a), & H_3'(a) = f'(a) \\ H_3(b) = f(b), & H_3'(b) = f'(b). \end{array}$$

Su formulación con diferencias divididas resulta

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f[a, a, b](x - a)^2 + f[a, a, b, b](x - a)^2(x - b),$$

donde

$$f[a, a, b] = \frac{f[a, b] - f'(a)}{b - a}$$

$$f[a, a, b, b] = \frac{f'(b) - 2f[a, b] + f'(a)}{(b - a)^2}$$

El error sale en función de la derivada cuarta de f:

$$f(x) - H_3(x) = (x - a)^2(x - b)^2 f[a, a, b, b, x] = \frac{(x - a)^2(x - b)^2}{24} f^{(4)}(\xi_x),$$

para cierto $\xi_x \in [\min\{a, b, x\}, \max\{a, b, x\}]$.

3 Interpolación por polinomios a trozos

Las funciones polinómicas a trozos se utilizan en una gran variedad de problemas numéricos distintos, desde la teoría de la aproximación, a la computación de gráficas, integración y diferenciación numérica, resolución numérica de ecuaciones diferenciales, integrales y en derivadas parciales. Nosotros vamos a verlos sólo desde el punto de vista de la interpolación.

Primero tenemos que especificar qué es lo que entendemos por un polinomio a trozos:

Definición 3.1 *Considérese una malla de $m+1$ puntos distintos y ordenados*

$$-\infty < z_0 < z_1 < \cdots < z_m < \infty$$

Diremos que $P(x)$ es una función polinomial a trozos de orden r si $P(x)$ es un polinomio de grado $\leq r$ en cada subintervalo

$$(-\infty, z_0], [z_0, z_1], \dots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, \infty).$$

Observaciones:

- A menudo en esta definición no se incluyen los intervalos $(-\infty, z_0)$ y (z_m, ∞).

- En general, no se hacen requerimientos de regularidad de $P(x)$ en los puntos de salto z_i, aunque normalmente se trabaja con $P(x)$ continuos.

El tipo de polinomios a trozos más habitual con el que se trabaja es el caso $\mathbf{r = 3}$, y es con el que vamos a seguir a partir de ahora.

Principalmente, hay dos puntos de vista a la hora de interpolar mediante polinomios a trozos:

- *Problema de interpolación local*: Queremos aproximar $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Para ello se elige una malla
$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_m = b$$
que habitualmente es igualmente espaciada. En cada uno de los subintervalos $[z_i, z_{i+1}]$ se toman 4 nodos
$$z_i = x_{i,0} < x_{i,1} < x_{i,2} < x_{i,3} = z_{i+1}$$
y se busca el polinomio de interpolación ordinario $p_{3,i}$ de grado 3 que interpola a f en esos nodos $\{x_{i,0}, x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}\}$ Con esto se consigue un polinomio cúbico a trozos $P(x) \in C[a, b]$. El problema es que no suele ser derivable, lo que limita su utilidad.

- *Problema de interpolación global*: Se busca un polinomio a trozos que interpole a $f(x)$ en una serie de nodos $x_i \in [a, b]$ pero que además sea suficientemente derivable en todo $[a, b]$. El tipo de polinomios a trozos más usado en este caso son los llamados *splines*, que veremos a continuación.

3.1 Splines

Definición 3.2 *Considérese una malla de puntos*
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$
Decimos que una función $s(x)$ es una <u>función spline de orden $m \geq 1$</u> si verifica las siguientes propiedades:

(P1) *$s(x)$ es un polinomio de grado $\leq m$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

(P2) *$s^{(r)}(x) \in C[a, b]$, $\forall 0 \leq r \leq m-1$, o lo que es lo mismo, $s(x) \in C^{m-1}[a, b]$.*

Además, se dice que es un <u>spline interpolador</u> de una función $f(x)$ en $[a, b]$ sii
$$s(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

En la práctica se usa sobre todo el *spline cúbico interpolante*:
$$s(x) = \begin{cases} \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}]: \quad s(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \\ \\ s(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \\ \\ s^{(r)}(x_i^-) = s^{(r)}(x_i^+),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ r = 0, 1, 2 \quad (s \in C^2[a, b]) \end{cases} \tag{3.1}$$

Para calcular $s(x)$ tenemos que determinar los coeficientes $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ en cada uno de los n subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$, por lo que tenemos $4n$ parámetros a determinar. Estos parámetros han de verificar (3.1), lo que supone $n+1$ ecuaciones de la condición de interpolación y de la condición de regularidad ($s \in C^2[a, b]$) resultan $n-1$ ecuaciones más para cada derivada $r = 0, 1, 2$. En total salen
$$(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2 \text{ condiciones},$$
por lo que nos faltarán dos ecuaciones para determinarlo unívocamente (si es posible).

Hay varias maneras de elegir estas dos condiciones. Las más usuales consisten en exigir condiciones de regularidad también en la frontera, es decir, exigiendo en a y b las siguientes condiciones:

(S1) $s''(a) = s''(b) = 0$ *spline natural*

(S2) $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$ *spline completo (o sujeto)*

(S3) $s'(a) = s'(b), s''(a) = s''(b)$ *spline periódico*

Cuando no se dispone de información en la frontera, se usan también otras condiciones adicionales en los otros nodos, como por ejemplo, exigir que $s^{(3)}(x)$ sea continua en x_1 y x_{n-1}, pero esto no lo veremos.

Vamos a deducir la formulación de los splines cúbicos interpolantes. Para ello, en primer lugar se definen los llamados *momentos*:

$$M_i = s''(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Como $s(x)$ es un polinomio cúbico en $[x_i, x_{i+1}]$, $s''(x)$ va a ser un polinomio de grado 1:

$$s''(x) = A_i x + B_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Exigiendo que $s''(x_i) = M_i, s''(x_{i+1}) = M_{i+1}$, sale fácilmente que

$$A_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i}, \quad B_i = \frac{x_{i+1}M_i - x_i M_{i+1}}{h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

por lo que se puede expresar

$$s''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Con esto tenemos que $s''(x)$ es continua en $[a, b]$ como nos exige una de las condiciones de los spline. Integrando una vez obtenemos $s'(x)$ con una constante de integración arbitraria:

$$s'(x) = \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_i} + \alpha_i, \tag{3.3}$$

y volviendo a integrar obtenemos $s(x)$ con otra constante arbitraria adicional:

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \alpha_i(x - x_i) + \beta_i. \tag{3.4}$$

Para determinar estas $\{\alpha_i, \beta_i\}$ usaremos las condiciones de interpolación $s(x_i) = f(x_i) =: f_i, s(x_{i+1}) = f_{i+1}$. Es fácil ver que resulta

$$\beta_i = f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}, \quad \alpha_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Así hemos construido un polinomio cúbico a trozos continuo en todo $[a, b]$ (porque en cada trozo es un polinomio y en cada punto de salto coinciden por los dos lados).

Aún nos queda determinar los $n+1$ momentos $\{M_i\}_{i=0}^n$. Para calcularlos hay que tener en cuenta que no hemos exigido la condición de que $s'(x)$ sea continua en todo $[a, b]$ o , lo que es lo mismo, las $n-1$ condiciones restantes

$$\lim_{x \to x_i^-} s'(x) = \lim_{x \to x_i^+} s'(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

De la igualdad (3.3) tenemos

$$\text{Si } x \in [x_{i-1}, x_i]: \quad s'(x) = \frac{-(x_i - x)^2 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^2 M_i}{2h_{i-1}} + \alpha_{i-1}$$

$$\text{Si } x \in [x_i, x_{i+1}]: \quad s'(x) = \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_i} + \alpha_i$$

Por tanto, en x_i,

$$s'(x_i^-) = \frac{h_{i-1}M_i}{2} + \alpha_{i-1}$$

$$s'(x_i^+) = \frac{-h_i M_i}{2} + \alpha_i$$

Igualando estas expresiones, desarrollando los valores de α_{i-1}, α_i y operando resulta

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.5}$$

de donde tenemos $n-1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas.

Nos quedan los dos grados de libertad que ya sabíamos, y que se determinarán según **(S1)** o **(S2)** o **(S3)**.

Vamos a ver sólo el caso del spline completo **(S2)**. Para los otros dos casos se desarrollan cálculos similares.

(S2) (Spline completo) $s'(a) = f'(a), s'(b) = f'(b)$, de la expresión de $s'(x)$ de (3.3) en $[a = x_0, x_1]$ y $[x_{n-1}, x_n = b]$, aparecen dos ecuaciones más:

$$\begin{aligned} \frac{h_0}{3}M_0 + \frac{h_0}{6}M_1 &= \frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'(a) \\ \frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3}M_n &= -\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} + f'(b), \end{aligned} \tag{3.6}$$

En total se tienen $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas $\{M_i\}_{i=0}^n$.

La resolución del sistema (3.5) junto con estas condiciones de frontera no es sencillo.

Para resolverlo el completo vamos a expresar las ecuaciones (3.5)-(3.6) en forma matricial:

$$AM = D,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'(a) \\ \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0} \\ \frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{f_2 - f_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} \\ f'(b) - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

La matriz A es simétrica, definida positiva (todos sus menores principales son > 0) y diagonalmente dominante (el módulo del término de la diagonal es mayor que el módulo de cualquiera de los elementos de su fila). Por propiedades básicas de resolución de sistemas lineales, estas tres condiciones implican que el sistema tiene solución única M, por lo que los splines cúbicos interpolantes completos quedan determinados unívocamente. Además, hay métodos numéricos que resuelven este sistema con muy pocas operaciones.

El siguiente teorema nos da información sobre el error cometido al sustituir una función $f(x)$ por su spline cúbico interpolador completo **(S2)**. Existen teoremas análogos para los otros casos, pero no los vamos a ver.

Teorema 3.1 *Sea $f(x) \in C^4[a,b]$, y una partición dada del intervalo $[a,b]$*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

definiendo

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \ i = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad h_{\max} = \max_{0 \le i \le n-1} h_i.$$

Sea $s_c(x)$ el spline cúbico interpolador completo de f en la partición dada, que verifica

$$s_c(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$
$$s_c'(a) = f'(a), \quad s_c'(b) = f'(b).$$

Entonces,

$$\max_{x \in [a,b]} |f^{(j)}(x) - s_c^{(j)}(x)| \le C_j \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| \, h_{\max}^{4-j}, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{3.7}$$

Además, se conocen valores aceptables de estas cotas C_j, a saber,

$$C_0 = \frac{5}{384}, \qquad C_1 = \frac{1}{24}, \qquad C_2 = \frac{3}{8}.$$

Observaciones:

- Para el caso $j = 0$ tenemos que el error $|f(x) - s_c(x)|$ está acotado por $h_{\max}^4$. Por tanto, cuanto más pequeño sea $h_{\max}$ (n es mayor), menor será el error cometido.
- Obsérvese que no sólo nos da el error de aproximar $f(x)$ por $s_c(x)$, sino que además nos informa del error de aproximar las derivadas de órdenes 1 y 2.
- Realmente, este teorema se define de forma más general, donde la partición de $n+1$ elementos se va haciendo cada vez más fina. Es decir, se toma una sucesión de particiones cada vez más finas de $[a,b]$
$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b, \qquad h_{\max}^{(n)} \to 0,$$
y la acotación (3.7) también se verifica con las constantes C_j independientes de n.
- Bajo ciertas condiciones también se demuestra para el caso $j = 3$.

4 Interpolación trigonométrica

Las funciones periódicas son una clase de funciones muy importantes sobre todo en el campo de las aplicaciones. Una función $f(t)$ se dice *periódica de periodo* τ si

$$f(t + \tau) = f(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Así que tiene mucho interés interpolarlas. Las funciones periódicas más conocidas son las trigonométricas, cuyo periodo habitual es

$$\tau = 2\pi, \quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta), \ \forall\theta.$$

Además, sin pérdida de generalidad, podremos suponer siempre que el periodo es 2π, pues en caso de que no lo sea basta con hacer un reescalamiento de la variable independiente.

Para interpolar funciones periódicas se usan sobre todo los llamados *polinomios trigonométricos de grado n*:

$$p_n(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(j\theta) + b_j \sin(j\theta). \tag{4.1}$$

Obsérvese que estos polinomios tienen $2n+1$ coeficientes. Por tanto, el *problema de interpolación trigonométrico* consiste en buscar un polinomio trigonométrico de la forma (4.1) que interpole a una función $f(\theta)$ periódica de periodo 2π en $2n+1$ nodos distintos en $[0, 2\pi)$, es decir,

$$p_n(\theta_k) = f(\theta_k), \quad k = 0, 2, \ldots, 2n, \qquad 0 \le \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{2n} < 2\pi. \tag{4.2}$$

En principio, se puede abordar directamente este problema como se hizo con la interpolación de Lagrange (se propone como ejercicio). Pero a la hora de la computación se vuelve un poco engorroso, así que se suele utilizar la siguiente formulación alternativa.

Aplicando la fórmula de Euler para números complejos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{4.3}$$

se tiene

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Llevando esto a (4.1) obtenemos

$$p_n(\theta) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ij\theta}, \tag{4.4}$$

donde

$$c_0 = a_0, \qquad c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}, \qquad c_j = \frac{a_j - ib_j}{2} = \bar{c}_{-j}, \qquad 1 \le j \le n.$$

Por tanto, si calculamos los $\{c_j\}_{j=-n}^{n}$, obtenemos directamente los coeficientes del polinomio trigonométrico buscado.

Para solventar el problema de los índices negativos basta observar que multiplicando $p_n(\theta)$ por $e^{in\theta}$ obtenemos

$$q_{2n}(\theta) = e^{in\theta} p_n(\theta) = \sum_{j=0}^{2n} d_j e^{ij\theta}, \qquad d_j = c_{j-n}, \quad 0 \le j \le 2n.$$

Para calcular estos d_j se hace un pequeño "viaje" al campo complejo. Así generalizamos (4.4) mediante el polinomio complejo

$$Q_{2n}(z) = \sum_{j=0}^{2n} d_j z^j, \tag{4.5}$$

de tal forma que cuando $z = e^{i\theta}$ (o sea, cuando está sobre la circunferencia unidad)

$$Q_{2n}(e^{i\theta}) = q_{2n}(\theta).$$

Denotando

$$z_k = e^{i\theta_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n,$$

resulta que el problema de interpolación trigonométrica (4.2) se transforma en encontrar los d_j que hagan que se verifique

$$Q_{2n}(z_k) = z_k^n f(\theta_k), \quad k = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{4.6}$$

es decir, en buscar un polinomio (en el campo complejo) de grado $\le 2n$ que en $2n+1$ nodos distintos $\{z_k\}_{k=0}^{2n}$ pase por las $2n+1$ ordenadas $\{z_0^n f(\theta_0), z_1^n f(\theta_1), \ldots, z_{2n}^n f(\theta_{2n})\}$.

El teorema de existencia y unicidad (Teorema 1.1) nos afirma que existe y es único, con lo que tenemos resuelto el problema, es decir, *existe un único polinomio trigonométrico $p_n(\theta)$ de la forma (4.1) interpola a la función periódica $f(\theta)$ en los $2n+1$ nodos distintos (4.2).*

4.1 Interpolación trigonométrica con nodos igualmente espaciados

Ya hemos visto que existe el polinomio trigonométrico interpolador (4.1). Vamos a ver ahora una forma práctica de computarlo en el caso de que los nodos estén *igualmente espaciados en el intervalo* $[0, 2\pi)$, que es el caso más usado en la práctica. Más precisamente, en el caso

$$\theta_k = k\,\frac{2\pi}{2n+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n. \tag{4.7}$$

Necesitamos ver la siguiente propiedad previamente.

Proposición 4.1 *Para cualquier entero l se tiene*

$$\sum_{m=0}^{2n} e^{il\theta_m} = \begin{cases} 2n+1, & si\ e^{i\theta_l} = 1 \\ 0, & si\ e^{i\theta_l} \neq 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

A partir de aquí se obtienen los coeficientes del polinomio trigonométrico interpolador (4.1)-(4.2) de la siguiente manera:

Proposición 4.2 *Los coeficientes c_j de (4.4) vienen dados por*

$$c_j = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} e^{-ij\theta_k} f(\theta_k), \qquad j = -n, -n+1, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Los coeficientes a_j, b_j del polinomio trigonométrico interpolador (4.1)-(4.2) se calculan directamente como

$$a_0 = c_0, \quad a_j = 2\,Re\,c_j = c_j + c_{-j}, \qquad b_j = 2\,Im\,c_j = -i(c_j - c_{-j}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Observación: El conjunto de los coeficientes $\{c_j\}_{j=-n}^{n}$ dados por (4.9) se llama *la transformada discreta de Fourier*, pues están muy relacionados con los coeficientes de la serie de Fourier de $f(\theta)$:

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n e^{int}$$

$$\delta_l = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-il\theta} f(\theta)\, d\theta, \quad -\infty < l < \infty.$$

El estudio del error de interpolación de los polinomios interpolatorios trigonométricos es bastante complicado. Vamos a ver unos cuantos resultados importantes, de los que extraeremos sobre todo las ideas que nos aportan, más que de los resultados propiamente dichos.

Para poderlos entender de forma clara tenemos que introducir cierta notación:

$$\Pi_{n,[0,2\pi)} = \{p_n(\theta) \text{ polinomios trigonométricos de grado} \leq n \text{ de la forma (4.1)}\}$$

Cuando $f(\theta)$ es una función periódica de periodo 2π y $p(\theta) \in \Pi_{n,[0,2\pi)}$, la distancia entre f y p se mide con la norma infinito, que en este caso resulta

$$\| f - p \|_\infty = \max_{\theta\in I\!R} |f(\theta) - p(\theta)| = \max_{\theta\in[0,2\pi)} |f(\theta) - p(\theta)|$$

pues para todo $x \in I\!R - [0, 2\pi)$ se tiene que $x = \theta + 2k\pi$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$ y cierto $k \in \mathbb{Z}$ y, por la periodicidad de f y p:

$$|f(x) - p(x)| = |f(\theta + 2k\pi) - p(\theta + 2k\pi)| = |f(\theta) - p(\theta)|.$$

Además, se define el *error minimax de f en* $\Pi_{n,[0,2\pi)}$ como

$$\rho_n(f) = \inf_{p\in\Pi_{n,[0,2\pi)}} \| f - p \|_\infty \tag{4.10}$$

es decir, la menor distancia de f a cualquier polinomio trigonométrico de $\Pi_{n,[0,2\pi)}$.

Observaciones:

- Nótese que en la definición de $\rho_n(f)$ aparece el ínfimo, no el máximo, pues ese valor no tiene porqué alcanzarse para ningún $p \in \Pi_{n,[0,2\pi)}$.
- Estas definiciones funcionan exactamente igual si f es periódica con periodo T de tal manera que $2\pi = kT$ para cierto entero k.

A partir de estas definiciones se consiguen los siguientes resultados que nos hablan del error cometido al interpolar una función periódica f mediante polinomios trigonométricos:

Teorema 4.1 *Sea $f(\theta)$ continua y de período 2π. Entonces, el polinomio trigonométrico interpolador $p(\theta)$ de $f(\theta)$ (dado por (4.4)-(4.9)) en $2n+1$ nodos igualmente espaciados (4.7) satisface*

$$\| f - p_n \|_\infty = \max_{\theta \in [0,2\pi)} |f(\theta) - p_n(\theta)| \leq C \ln(n+2)\, \rho_n(f), \qquad \forall n \geq 0,$$

donde C es una constante independiente de n y de f.

No veremos su demostración.

Por tanto, el error de interpolación vendrá acotado según sea el minimax $\rho_n(f)$. Existen muchas estimaciones teóricas de este error $\rho_n(f)$. La cota más utilizada en la práctica es la aportada por D. Jackson:

Proposición 4.3 *Supongamos que $f \in C^k[0,2\pi], k \geq 0$, y que además $f^{(k)}(\theta)$ verifica la condición (llamada condición Hölder):*

$$|f^{(k)}(\theta_1) - f^{(k)}(\theta_2)| \leq C_f |\theta_1 - \theta_2|^\alpha, \qquad \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$$

para cierto $0 < \alpha \leq 1$. Entonces

$$\rho_n(f) \leq \frac{C_k(f)}{n^{k+\alpha}}, \quad n \geq 1,$$

donde $C_k(f)$ es una constante independiente de n.

Por ejemplo, si $\alpha = 1, k = 0$ (el caso más usado), se tiene que si

$$|f(\theta_1) - f(\theta_2)| \leq C_f |\theta_1 - \theta_2|, \qquad \forall \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$$

entonces

$$\rho_n(f) \leq \frac{C_0(f)}{n} \quad \Rightarrow \quad \| f - p_n \|_\infty \leq K_f \frac{\ln(n+2)}{n},$$

o sea, que a medida que aumentamos el grado n la distancia entre f y p_n tiende a 0.