Métodos Analíticos en Estadística - Curso 2005/06
Métodos numéricos para Estadística
TEMA 7: INTEGRACIÓN NUMÉRICA
Problemas

1. La regla del trapecio $T_2(f)$ aplicada a $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ nos da 4 y la regla de Simpson $S_3(f)$ nos da 2. ¿Cuánto vale $f(1)$?.

2. La regla de trapecio $T_2(f)$ aplicada a $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ nos da 5 y la regla del punto medio $PM_1(f)$ nos da 4. ¿Cuánto nos dará la regla de Simpson si se la aplicamos a dicha integral?

3. Sea $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Probar que si n es par la regla de los trapecios compuesta la integra correctamente. Calcular la estimación si n es impar.

4. Estimar el valor de la integral
$$\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt$$
mediante la regla del trapecio y Simpson compuestas con 11 nodos (incluidos 0 y 1). Comparar con el resultado teórico (redondear con 6 decimales)

5. (a) Calcular una cota del error para la regla trapezoidal compuesta usando como estimación la suma de los errores de interpolación correspondientes a cada subintervalo.

   (b) Usar el apartado (a) para estimar en cuántos subintervalos iguales hay que subdividir $[0, 1]$ para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con tres cifras decimales exactas, es decir, con un error menor que 0.5×10^{-3}.

6. Sea $f \in C[0, 1]$ que verifica $f(x) + f(1 - x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$.

   (a) Probar que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$.

   (b) Demostrar que la regla trapezoidal compuesta sobre esta función es exacta.

7. Dada la función f en los valores tabulados por

x	$f(x)$
1.8	3.12014
2.0	4.42569
2.2	6.04241
2.4	8.03014
2.6	10.46675

   aproximar lo mejor posible la integral $\displaystyle\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$.

8. Hallar a_0 y a_1 para que la fórmula de cuadratura
$$\int_0^1 f(x)x^\alpha\,dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + E(f), \qquad \alpha > -1$$
sea de tipo interpolatorio.

   (a) Obtener una expresión para el error en términos de alguna derivada apropiada de f.

(b) Utilizando los resultados anteriores, obtener una fórmula de integración para $\int_0^h g(t)t^\alpha dt$, $h > 0$, incluyendo una expresión para el error.

9. Supongamos que aproximamos

$$\int_0^1 f(x)dx \doteq af(1/4) + bf(1/2) + cf(3/4).$$

Determinar a, b y c para conseguir el mayor grado de precisión posible. Deducir que la fórmula de cuadratura tiene grado de precisión igual a 3.

10. Determinar a_0 y a_1 para que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(t)\, dt \doteq a_0 f(0) + a_1 f(1)$$

sea exacta para las funciones de la forma

$$f(t) = ae^t + b\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad \forall a, b \in I\!R.$$

11. ¿Cuánto ha de valer α para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^1 f(t)\, dt \doteq f(-\alpha) + f(\alpha)$$

sea exacta en Π_2?, ¿y si deseas que sea exacta en Π_3?, ¿existe algún tipo de polinomios para el cual esta fórmula sea siempre exacta?

12. Usando exclusivamente $f(0), f'(-1), f''(1)$, determinar una aproximación a $\int_{-1}^1 f(t)\, dt$ que sea exacta para todos los polinomios cuadráticos. ¿Es exacta en Π_3? Razonar la respuesta.

13. Demostrar la fórmula del error de la regla del punto medio

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta), \qquad \eta \in (a, b).$$

14. Se sabe que una estimación para la cantidad de números primos que hay en (a, b) es

$$\int_a^b \frac{dt}{\ln t}.$$

(a) Utilizar la fórmula de cuadratura simple de Simpson para estimar la cantidad de números primos en (100,200).

(b) Idem con Gauss–Legendre considerando tres nodos.

(c) Dar cotas de los errores cometidos en los apartados anteriores. Comparar con el error real sabiendo que la cantidad real es 21.

15. ¿Es gaussiana la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx \doteq \frac{1}{3}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3}f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)?$$

16. Deduce la fórmula de cuadratura gaussiana de 2 nodos para la integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)\, dx,$$

cuya función peso es $w(x) = \ln(1/x)$.

17. Deduce las fórmulas de cuadratura gaussianas de 1 y 2 nodos para la integral

$$I(f) = \int_0^1 xf(x)\,dx,$$

cuya función peso es $w(x) = x$.

18. Sea $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ donde $w(x)$ es una función peso en $[a,b]$. Si aproximamos esta integral por una fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

de n nodos $\{x_k\}_{k=1}^n$ distintos y contenidos en $[a,b]$, probar que si su GP$\geq 2n-2$ entonces $A_k > 0$, $\forall j = 1,\ldots,n$.

19. Sea $I(f) = \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)w(x)\,dx$ donde $w(x)$ es una función peso en $[-a,a]$, $a>0$, e $I_n(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ la correspondiente fórmula gaussiana de n nodos. Demostrar que si $w(x)$ es una función par en $[-a,a]$, entonces

    (a) Los nodos son simétricos respecto al origen.

    (b) Los pesos correspondientes a nodos simétricos son iguales.

    (c) Si f es una función impar en $[-a,a]$, demostrar que $I_n(f)$ es exacta.

20. Para la integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

con función peso $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ encontrar fórmulas explícitas para los nodos y los pesos de la fórmula de cuadratura gaussiana general. (*Sugerencia:* usar los polinomios de Chebychev de segunda especie).

21. Sea $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ donde $w(x)$ es una función peso en $[a,b]$. Sean $\{a_j\}_{j=1}^m$ m puntos dados y distintos en $\mathbb{R}$. Dado un entero positivo n con $0 \leq m \leq n$, consideramos la siguiente fórmula de cuadratura

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{m} A_j f(a_j) + \sum_{k=1}^{n-m} B_k f(x_k),$$

siendo $\{A_j\}_{j=1}^m$ y $\{B_k\}_{k=1}^{n-m}$ pesos a determinar y $\{x_k\}_{k=1}^{n-m}$ nodos distintos a elegir. Probar que

    (a) GP$\leq 2n-m-1$.

    (b) GP$= 2n-m-1$ si y sólo si:

        i. $I_n(f)$ es de tipo interpolatorio.

        ii. $\{x_k\}_{k=1}^{n-m}$ son los ceros del $(n-m)-$ésimo polinomio ortogonal respecto a la función peso

$$\rho(x) = w(x)\prod_{j=1}^{m}(x-a_j).$$

    Las fórmulas de este tipo de máximo grado de precisión se llaman *fórmulas de Gauss–Kronrod.*

    (c) ¿Cómo deben ser los puntos $\{a_j\}_{j=1}^m$ para garantizar que $I_n(f)$ tenga n nodos distintos dentro de $[a,b]$?

22. Calcular una cota de error al aproximar la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

mediante la fórmula gaussiana de n nodos.

23. Ídem con la integral

$$\int_{-1}^{1} e^x \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

24. Sea f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 0.5, \\ e^x \sin x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) ¿Es f continua en $[0, 1]$?

   (b) Evaluar $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

   (c) Aproximar la integral usando la regla de los trapecios compuesta con 7 nodos.

   (d) Aproximar la integral aplicando la regla de los trapecios compuesta con 4 nodos sobre cada una de las integrales

$$\int_0^{0.5} f(x)\, dx + \int_{0.5}^{1} f(x)\, dx.$$

   (e) Compara los resultados.

25. Experimente con diferentes formas de calcular las integrales

$$I_c = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt = 1.80904847580054...$$

$$I_s = \int_0^1 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = 0.62053660344676...$$

   (a) Utilice la regla de los trapecios compuesta con 5 nodos, ignorando la singularidad en $x = 0$ asignando una valor arbitrario a la función integrando en cero.

   (b) Utilice la regla de los trapecios compuesta con 4 nodos de longitud $h = 1/4$ en el intervalo $[h, 1]$, en combinación con la fórmula del punto medio en el intervalo $[0, h]$.

   (c) Realice el cambio de variable $t = x^2$ y aplique la regla trapezoidal compuesta con 5 nodos en $[0, 1]$.

   (d) Utilice la cuadratura de Gauss-Legendre con 5 nodos para las integrales obtenidas en el apartado (c).

Compare los resultados.