

Métodos Analíticos en Estadística - Curso 2005/06

Métodos numéricos para Estadística

TEMA 6: APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

Problemas

1. Probar que si una sucesión de funciones en $C[a, b]$ converge en norma uniforme, también converge según la norma $\|\cdot\|_{2,w}$, para una función peso $w(x)$ en $[a, b]$. Demostrar que el recíproco no es cierto.

(Sugerencia: usar la sucesión $f_n(x) = \left(\frac{n}{1+n^4x^2}\right)^{1/2}$ con $w(x) \equiv 1$ en $[-1, 1]$.)

2. Calcular

$$\min_{p \in \Pi_n} \left(\int_1^2 (f(x) - p(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

para $f(x) = \ln x$.

3. Ídem para $f(x) = e^x$.

4. Hallar la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} \in C([-1, 1])$ en Π_2 si en $C([-1, 1])$ consideramos el producto interior:

(a) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx.$

(b) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

En ambos caso determinar la desviación mínima.

5. La forma bilineal

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t) (t+2)e^{-t} dt$$

define un producto escalar en el espacio V de las funciones $f \in C([0, \infty))$ tales que $\langle f, f \rangle < +\infty$.

(a) Hallar los cuatro primeros polinomios ortogonales mónicos respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) Dada la función $f(t) = t^2 e^{-t}$, hallar la mejor aproximación mínimo cuadrática a f en Π_3 .

(c) ¿Se puede realizar el apartado (b) para la función $f(t) = te^{\frac{t}{2}}$?

6. Si denotamos por $\hat{\Pi}_n$ al conjunto de todos los polinomios mónicos de grado n . Y $\pi_n(\cdot; \omega)$ es el n -ésimo polinomio ortogonal mónico asociado a la función peso ω en $[a, b]$. Demostrar que

$$\int_a^b \pi_n^2(t) \omega(t) dt \leq \int_a^b p^2(t) \omega(t) dt, \quad p \in \hat{\Pi}_n.$$

Lo que quiere decir que el n -ésimo polinomio ortogonal mónico es el de norma mínima.

7. ¿Cuál es la mejor aproximación por mínimos cuadrados de la función $f(t) = 0$ en $[a, b]$ en el conjunto de los polinomios de grado n mónicos con la norma $\|\cdot\|_{2,\omega}$?, ¿y en Π_n ?

8. Los polinomios de Tchebyshev de segunda especie se definen para $t \in [-1, 1]$ como :

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad t = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi]$$

- (a) Demostrar que se verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 \quad , \quad U_0(t) = 1 \quad , \quad U_1(t) = 2t \quad .$$

En particular, U_n es un polinomio de grado n .

- (b) Demostrar que para $n \geq 0$ el polinomio U_n tiene la misma paridad que el subíndice n . Hallar las raíces de U_n . Probar la siguiente relación con los polinomios de Tchebyshev T_n .

$$T'_n(t) = nU_{n-1}(t) \quad , \quad n \geq 1 \quad .$$

- (c) Demostrar que

$$\int_{-1}^1 U_n(t) \cdot U_m(t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad .$$

¿Se puede decir que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forman una sucesión de polinomios ortogonales mónicos ?. Obtener una base ortonormal de Π_n con respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

9. Hallar la expresión de los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales respecto al producto escalar

$$(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx \quad .$$

10. Probar que los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$, $n \geq 0$ son ortogonales respecto de la función peso $1/\sqrt{1-x^2}$ en $[-1, 1]$.
11. Los polinomios de Laguerre son los polinomios ortogonales respecto de la función peso $w(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$. Sabiendo que $L_0(x) = 1$, calcular L_1 , L_2 y L_3 por el procedimiento de ortogonalización de Gram-Smith. Usar estos polinomios para calcular el polinomio de mínimos cuadrados de grado ≤ 3 que aproxima a las funciones $f_1(x) = e^{-x/2}$ y $f_2(x) = \sin(x)/x$.
12. Demostrar que los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n \geq 0,$$

son ortonormales respecto la función peso $w(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, \infty)$.

Sugerencia: Demostrar primero que

$$\frac{d^r}{dx^r} (x^n e^{-x}) = 0, \quad \text{para } x = 0, \infty, \quad r = 0, 1, \dots, n-1,$$

y usar la integración por partes.

13. Demostrar que los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n], \quad n \geq 1, \quad P_0(x) \equiv 1,$$

es ortogonal respecto la función peso $w(x) \equiv 1$ en $[-1, 1]$. Calcular también $\|P_n\|_{2,w}$.

14. Calcular el polinomio de grado ≤ 2 que mejor aproxima a $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$ con norma $\|\cdot\|_2$ ($w(x) \equiv 1$). Usar primero polinomios ortogonales. Resolver también el problema mediante el cálculo directo.
15. Obtener la mejor aproximación en norma $\|\cdot\|_{2,w}$ de la función $f(x) = xe^x$ mediante polinomios de grado ≤ 2 en $[0, 2]$ usando el peso $w(x) = x$. Obtener el error.

16. Demostrar que si $f \in C[a, b]$ y $p_n(x)$ es su mejor aproximación por mínimos cuadrados en Π_n respecto a $w(x)$, entonces $p_n(x)$ interpola a f al menos en $n + 1$ puntos de (a, b) .

17. Sea $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, ($f(x) \in [0, \pi]$).

(a) Encontrar el polinomio $p_n \in \Pi_n$ que minimiza

$$\int_{-1}^1 \frac{(f(x) - p_n(x))^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

(b) Demostrar que existe $F \in C[-1, 1]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - p_n\|_{\infty} = 0.$$

Comprobar que tiene que ser $F \equiv f$.

(c) Probar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

18. En el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ se considera la norma $\|\cdot\|_2$. Si denotamos por \mathcal{T}_n el conjunto de polinomios trigonométricos de grado a lo sumo n .

(a) Determinar la mejor aproximación en \mathcal{T}_n de la función $f(x) = x$ y la desviación mínima.

(b) Usando el resultado del apartado anterior demostrar que: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{\pi}{4}$.

(c) Repetir el primer apartado para la función $f(x) = |x|$.

(d) Utilizando los resultados del apartado anterior demostrar que: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

19. Sea $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$. Estudiar su serie de Fourier con los polinomios ortogonales de Chebychev de 1 especie $\{T_k\}$.

(a) Estudiar la convergencia uniforme de la serie de Fourier resultante.

(b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

20. Sea $w(x)$ una función peso en $[-a, a]$, $a > 0$, y sea $\{\varphi_n\}_n$ la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Probar que para cada n , φ_n es una función par/impar según n sea par/impar.

21. Sea $\{T_k\}$ la sucesión de polinomios ortogonales de Chebychev de primera especie. Demostrar que si $f(x)$ es par/impar en $[-1, 1]$, entonces los coeficientes de Fourier verifican que $c_k = 0$ si k es impar/par.

22. Sea $f(x) = x^n$. Demostrar que la mejor aproximación a f por mínimos cuadrados en Π_n es la misma f , en cualquier intervalo $[a, b]$ con una función peso $w(x)$.

23. Hallar el polinomio de grado no mayor que 1 mejor aproximación por mínimos cuadrados en los puntos $-1, 0, 1/8$, de la función $y = x^{1/3}$. Calcular el error.

24. El estiramiento de un resorte obedece a la ley de Hooke

$$e = e_0 + K \cdot F$$

donde e_0 es el estiramiento inicial, F la fuerza aplicada y K la constante de elasticidad del resorte. Se han medido los siguientes valores para (F, e) : $\{(0, 5.3), (2, 7.0), (4, 9.4), (6, 12.3)\}$, donde F se mide en Newtons y la distancia en cms. Calcular la constante de elasticidad del resorte.

25. Deducir la ecuación de la recta de regresión (Y sobre X) para un conjunto de N datos $\{(x_k, y_k), k = 1, 2, \dots, N\}$.

26. Considérense los datos de la siguiente tabla:

x	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
$f(x)$	2.2	3.5	4.0	6.0	6.5	7.3	8.2	8.7

Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima estos datos. Calcular el error cuadrático y comparar con el ajuste lineal.

27. Construir los tres primeros polinomios de una sucesión de polinomios ortogonales usando el producto escalar

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)g(1).$$

28. Comprobar que las funciones $1, \cos(x), \sin(x)$ son ortogonales respecto del producto escalar

$$(f, g) = \sum_{k=1}^4 f(x_k)g(x_k)$$

con $x_k = k\pi/2$. Como aplicación, hallar en el conjunto de los polinomios trigonométricos $a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$ el que más se aproxima a $y = x$ en el sentido de los mínimos cuadrados en los puntos $x_k = k\pi/2, k = 1, 2, 3, 4$.