INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL - ESP. MECÁNICA

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Práctica 3: Ejercicios

Ejercicio 1

Estudiar el tipo de indeterminación y calcular los siguientes límites.

a) $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{5}{4+n}\right)^n$ **b)** $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+3}{n^2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ **c)** $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n}$ **e)** $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

Ejercicio 2

Investiga si son convergentes o divergentes las sucesiones $\frac{\sin(n)}{n^2}, \frac{n!}{n^n}$.

Ejercicio 3

Investiga si la sucesión $\frac{n!}{\mathbf{e}^n}$ es creciente, decreciente, o ninguna de ambas cosas. ¿Es convergente?

Ejercicio 4

En el estudio de la procreación de conejos, Fibonacci encontró la famosa sucesión que lleva su nombre, definida por recurrencia como $\mathrm{a}(1) = 1$
$\mathrm{a}(2) = 1$ $\mathrm{a}(n+2) = \mathrm{a}(n) + \mathrm{a}(n+1)$. (a) Escribir sus 12 primeros términos. (b) Escribir los 10 primeros términos de la sucesión definida por

$$\mathrm{b}(n) = \frac{\mathrm{a}(n+1)}{\mathrm{a}(n)}.$$

Ejercicio 5

Sean a(1)=1 y $\mathrm{a}(n+1) = \frac{\mathrm{a}(n) + \frac{4}{\mathrm{a}(n)}}{2}$ para $1 \leq n$. Probar numéricamente que la sucesion así definida converge a 2.

Ejercicio 6

Considérese la sucesión cuyo término general es

$$\mathrm{a}(n) = \begin{cases} \frac{2n-3}{3n+5} & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 3 \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } 3 \end{cases}$$

a) Definir el término general a_n y calcular los 50 primeros términos de la sucesión.
b) Representar gráficamente los 50 primeros términos de la sucesión de forma que se aprecie el comportamiento de cada una de las definiciones.

Ejercicio 7

Estudiar la convergencia de las siguientes series y sumarlas en el caso de ser convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(n+1)\,3^n}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

Ejercicio 8

Analizar si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$.

Ejercicio 9

En tiempos t=0,1,2... se administra una dosis de un fármaco cuya presencia en la sangre decrece exponencialmente a un ritmo r. Tras n+1 dosis, la cantidad de fármaco en la sangre es $d + d\,\mathbf{e}^{(-r)} + d\,\mathbf{e}^{(-2\,r)} + ... + d\,\mathbf{e}^{(-r\,n)}$. Demostrar que el nivel del fármaco en la sangre sería, después de infinitas dosis hipotéticas, igual a

$\dfrac{d}{1 - \mathbf{e}^{(-r)}}$. Si r=0.1, calcular la dosis necesaria para mantener un nivel 2 en sangre.

Ejercicio 10

Un pariente lejano y algo excéntrico te ha dejado una curiosa herencia. Durante el mes de diciembre recibirás una diezmilésima de euro el día 1, dos diezmilésimas el día 2, cuatro diezmilésimas el día 3 y así sucesivamente: cada día el doble que el anterior. ¿Cuánto recibirás este mes? Y si la herencia la cobraras durante el mes de febrero en vez de en diciembre, ¿qué proporción de la cantidad de diciembre recibirías al perder simplemente dos días de cobro?
Imagina ahora que la herencia se distribuye de la siguiente forma: diez euros el día 1, veinte euros el día 2, treinta euros el día 3 y así sucesivamente; cada día diez euros más que el anterior. ¿A cuánto ascendería la herencia?
Compara los resultados obtenidos e intenta justificar la diferencia.

Ejercicio 11

Se lanza una pelota de goma desde una altura de 5 metros. Supongamos que la pelota comienza a rebotar verticalmente, sin desplazamiento horizontal, de forma que en cada bote alcanza una altura igual a 2/3 partes de la altura alcanzada en el bote anterior. ¿Cúal es la distancia total recorrida verticalmente por la pelota?
NOTA: Tener en cuenta que, en cada rebote, se recorre la misma distancia dos veces: al subir y al bajar.

Ejercicio 12

Según una vieja leyenda hindú, el Rey Shirham de la India quiso recompensar a su gran visir Sissa Ben Dahir por inventar y presentarle el juego del ajedrez y le dejó pedir lo que quisiera por tal invento. Los deseos del visir parecieron muy modestos: "Majestad- dijo arrodillado ante su rey- dadme un grano de trigo para poner en la primera casilla del tablero, dos granos para poner

en la segunda casilla, cuatro para poner en la tercera casilla, ocho para poner en la cuarta casilla y, así, doblando el número de granos para cada uno de las sucesivas casillas, dadme suficiente para cubrir las 64 casillas del tablero".
¿Por qué el rey decidió cortar la cabeza a su visir?
NOTA: La medida internacional (*bushel*) para comerciar trigo abarca unos 5 millones de granos. Suponer que la producción anual mundial de trigo es de 2.000 millones de *bushels*.

Ejercicio 13

Un profesor, cansado de esperar que sus alumnos le entregen sus fichas de identificación decide poner en marcha un método persuasivo. A los alumnos que tarden una semana más en entregar la ficha, se les descontará 0.1 punto de su nota final. La segunda semana, a los alumnos que aún no hayan entregado la ficha se les descontará el doble de lo que ya llevan descontado (es decir, se descuenta 0.2 puntos. Sumados al descuento anterior, hacen 0.3 puntos). Cada semana se hará un nuevo descuento: el doble del total acumulado.
¿Cuántas semanas han de pasar para que un estudiante no tenga posibilidades de aprobar la asignatura (esto es, se le descuenten más de 5 puntos)?