

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Práctica nº 7: Cálculo integral de funciones de una variable

RESUMEN: Estudiamos en esta práctica el tratamiento con MAPLE de los conceptos básicos del cálculo integral de funciones de una variable, tanto la indefinida como la definida. Además, consideraremos también un método numérico de integración: la regla trapezoidal.

COMANDOS MÁS IMPORTANTES:

int(), Int(), with(student), leftbox(), leftsum(), rightbox(), rightsum(), middlebox(), middlesum()

- Integral indefinida

Una función $F(x)$ se llama **primitiva o integral indefinida** de otra función $f(x)$ si y sólo si $F'(x)=f(x)$.

La primitiva de una función $f(x)$ no es única: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la función $F(x)+C$ para cualquier constante arbitraria C también es una primitiva de $f(x)$. Por eso se denota al conjunto de todas las primitivas de la función $f(x)$ como

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

En MAPLE se pueden calcular las integrales indefinidas de la mayor parte de las funciones integrables cuya estructura no sea muy complicada. Para ello se usa el comando

int(f(x),x)

que nos da una primitiva de la función $f(x)$ respecto de la variable x . Para obtener el conjunto de todas las primitivas tendremos que añadirle la constante arbitraria C . Por eso se suele escribir la orden en la forma **int(f(x),x)+C**.

Para que aparezca la expresión matemática de la integral se usa la orden inerte

Int(f(x),x)

Ejemplo: Calcular primitivas de las funciones $f(x) = a \ln(a + b x)$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $h(x) = x^n$.

[> **Int(a*log(1+b*x),x)=int(a*log(1+b*x),x)+C;**

[> **Int(1/(x^2-1),x)=int(1/(x^2-1),x)+C;**

[> $\text{Int}(x^n, x) = \text{int}(x^n, x) + C;$

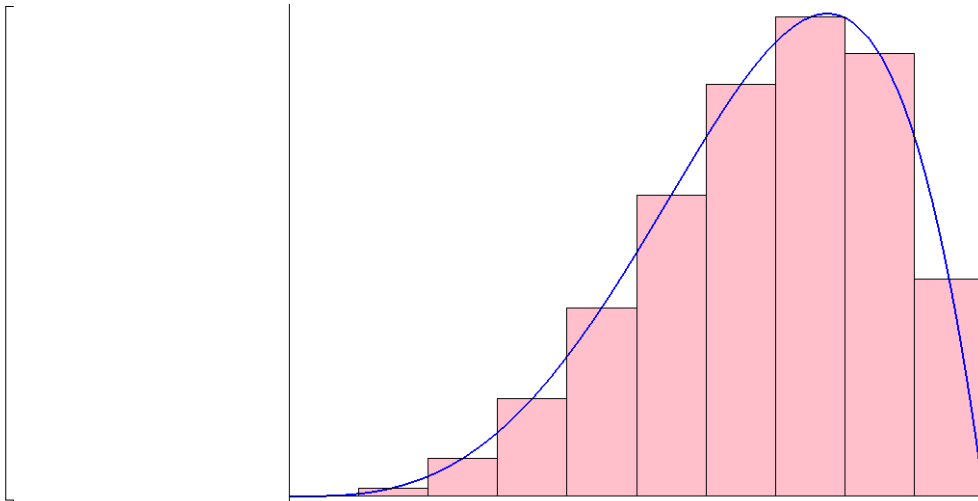
Sin embargo, no siempre se pueden encontrar las primitivas de cualquier función, al menos de forma explícita. Por ejemplo,

[> $\text{Int}(1/\ln(x), x) = \text{int}(1/\ln(x), x) + C;$

[> $\text{Int}(\exp(-x^2), x) = \text{int}(\exp(-x^2), x) + C;$

- Integral definida: la integral de Riemann

Riemann define la integral definida de una función $f(x)$ positiva como el área comprendida entre su gráfica y el eje OX para los valores de x dados por los límites de integración. Para calcularla, se recubre la región con el mayor número de rectángulos posibles aproximando el área total por la suma de las áreas de todos estos rectángulos:



El valor de la integral, en caso de existir, será el valor límite al que tienden las sumas del área de estos rectángulos cuando aumentamos el número de rectángulos usados. La idea de fondo de este método es que al utilizar cada vez rectángulos más estrechos podemos ajustar mejor el cálculo del área total. A este valor límite se le llama **integral definida de $f(x)$ entre a y b** y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Con Maple podemos calcular dichos rectángulos y dibujarlos aproximando el valor de la integral definida. Para ello necesitamos cargar el paquete específico **student**, mediante la orden **with(student):**

Vamos a aproximar el valor de la integral de la función $y=f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ recubriendo el área encerrada en este intervalo con n rectángulos de igual base.

Con este paquete podremos definir los rectángulos considerando su altura como el valor de $f(x)$ en

- el extremo izquierdo de los subintervalos: **leftbox** y **leftsum** o
- el extremo derecho de los subintervalos: **rightbox** y **rightsum** o
- el punto medio de los subintervalos: **middlebox** y **middlesum**

(a) Extremo izquierdo de los subintervalos: para representarlos gráficamente se usa el comando

leftbox(f(x), x=a..b, n)

y el valor de la suma de sus áreas viene dada por

leftsum(f(x), x=a..b, n)

(b) Extremo derecho de los subintervalos: para representarlos gráficamente se usa el comando

rightbox(f(x), x=a..b, n)

y el valor de la suma de sus áreas viene dada por

rightsum(f(x), x=a..b, n)

(c) Punto medio de los subintervalos: para representarlos gráficamente se usa el comando

middlebox(f(x), x=a..b, n)

y el valor de la suma de sus áreas viene dada por

middlesum(f(x), x=a..b, n)

NOTA: En los comandos de las sumas, Maple sólo deja indicada dichas sumas. Para que nos dé un valor numérico tendremos que usar el comando **evalf()**.

Ejemplo: Dar un valor aproximado de la integral $\int_0^1 x \cos(2\pi x \sin(2\pi x)) dx$ con quince rectángulos.

```
[ > restart;
```

```
[ > with(student);
```

```
[ > f:=x->x*cos(2*Pi*x*sin(2*Pi*x));
```

```
[ Usando el extremo izquierdo de los subintervalos, representamos gráficamente la aproximación:
```

```
[ > leftbox(f(x), x=0..1, 15);
```

```
[ Y obtenemos la suma de las áreas de estos rectángulos:
```

```
[ > leftsum(f(x), x=0..1, 15)=evalf(leftsum(f(x), x=0..1, 15));
```

```
[ Usando el extremo derecho obtenemos otra aproximación:
```

```
[ > rightbox(f(x), x=0..1, 15);
```

```
[ > rightsum(f(x), x=0..1, 15)=evalf(rightsum(f(x), x=0..1, 15));
```

```
[ Podemos usar el punto medio de los subintervalos para obtener otra aproximación:
```

```
[ > middlebox(f(x), x=0..1, 15);
```

```
[ > middlesum(f(x), x=0..1, 15)=evalf(middlesum(f(x), x=0..1, 15));
```

Pero Maple también es capaz de obtener el valor exacto de las integrales definidas de las funciones más habituales, usando el comando

int(f(x),x=a..b)

Si puede lo calcula simbólicamente, y si no, calcula una aproximación numérica.

Igual que en el caso de la indefinida, existe su versión inerte

Int(f(x),x=a..b)

que expresa la fórmula matemática.

Ejemplo: Calcular exactamente la integral $\int_0^3 e^{\sqrt{x}} dx$ y la dada en el ejemplo anterior (compara

los resultados).

```
[ > Int (exp (sqrt (x)) , x=0..3) =int (exp (sqrt (x)) , x=0..3) ;
```

```
[ > Int (f (x) , x=0..1) =int (f (x) , x=0..1) ;
```

[En este caso no puede darnos la expresión simbólica. Para que nos dé una aproximación usamos evalf:

```
[ > Int (f (x) , x=0..1) =evalf (int (f (x) , x=0..1) ) ;
```

[Comparando con el ejemplo anterior se ve que la mejor aproximación al valor de la integral la da la suma basada en el punto medio de los subintervalos.

Ejemplo: (Problema 104) Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Para resolverlo, lo primero que tenemos que hacer es dibujar dichas gráficas:

```
[ > f:=x->3*x^3-x^2-10*x; g:=x->-x^2+2*x;
```

```
[ > plot ([f (x) , g (x) ] , x=-5..5 , y=-20..20 , color=[red , blue] ) ;
```

Claramente hay dos zonas diferenciadas donde tendremos que calcular el área. Para determinarlas debemos encontrar los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$:

```
[ > sol:=solve (f (x) =g (x) , x) ;
```

Por tanto, el área será

```
[ > area:=int (f (x) -g (x) , x=-2..0) + int (g (x) -f (x) , x=0..2) ;
```

Ejemplo: (Problema 108) Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ alrededor del eje X.

Primero determinamos la región que va a girar:

```
[ > y1:=x->sqrt (x) ; y2:=x->x^2 ;
```

Como \sqrt{x} sólo está definida para x mayores o iguales a 0, sólo lo dibujamos en dichos puntos:

```
[ > plot ([y1 (x) , y2 (x) ] , x=0..3 , y=-1..6 , color=[orange , green] ) ;
```

Calculamos sus puntos de corte:

```
[ > sol1:=solve (y1 (x) =y2 (x) , x) ;
```

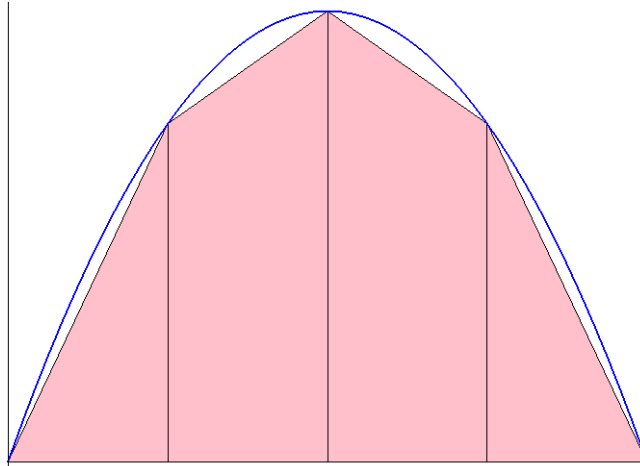
Al girar sobre el eje X podemos usar el método de los discos, por lo que el volumen va a ser la diferencia del volumen generado por la mayor de las curvas y el generado por la menor:

```
[ > vol:= Pi*(int ((y1 (x) ) ^2 , x=0..1) -int ((y2 (x) ) ^2 , x=0..1) ) ;
```

— Métodos de integración numérica: la regla trapezoidal

Como hemos visto en el apartado anterior, cuando no podemos calcular una primitiva de la función podemos hallar una aproximación mediante el uso de los rectángulos de Riemann. Pero dichas aproximaciones se pueden mejorar usando los llamados **métodos de integración numérica**. En esta sección veremos uno de estos métodos: la **regla trapezoidal** (o regla de los trapecios).

Este método aproxima el área bajo la curva de $f(x)$ en $[a,b]$ mediante el área de los trapecios formados con la unión de los puntos de la izquierda y de la derecha de cada subintervalo, en lugar de usar los rectángulos:



Cuantos más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación.

Para definirlo en forma general, se subdivide el intervalo $[a,b]$ en n partes de igual longitud, esto es, se toman $n+1$ puntos equiespaciados de la forma

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

donde

$$x_k = a + kh, \quad k=0,1,\dots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

A este conjunto de puntos se le denomina **partición del intervalo** $[a,b]$. El área de cada trapecio que une los puntos $(x_i, 0)$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, $(x_{i+1}, 0)$, es igual a

$$\frac{(f(x_i) + f(x_{i+1})) h}{2}$$

Por tanto, sumando todas las áreas para i desde 0 hasta $n-1$, obtenemos la fórmula de la **regla trapezoidal** en n subintervalos para aproximar la integral de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx \sim R(a,b,n), \quad \text{donde } R(a,b,n) = h \left(\frac{f(a)}{2} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

Ejemplo: Calcular mediante la regla trapezoidal con $n=10$ subintervalos una aproximación a la

integral $\int_0^1 x \cos(2 \pi x \sin(2 \pi x)) dx$

```
[ > restart;
[ > a:=0; b:=1; f:=x->x*cos(2*Pi*x*sin(2*Pi*x));
[ > n:=15; h:=(b-a)/n;
[ > aprox:= evalf(h*(f(a)/2 + sum(f(a+i*h),i=1..n-1) + f(b)/2));
```

Comparando con la que nos dio Maple arriba vemos que es una aproximación bastante buena. Pero en general, ¿qué error cometerá la regla trapezoidal?

Acotación del error de la regla trapezoidal: Si la derivada segunda $f''(x)$ existe en el intervalo $[a, b]$ y está acotada por M , esto es,

$$|f''(x)| < M \text{ para todo } x \text{ en } [a, b],$$

entonces el error cometido por la regla trapezoidal con n subintervalos está acotado por:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R(a, b, n) \right| < \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

Ejemplo: Calcular una cota del error cometido en el ejemplo anterior.

Lo primero que tenemos que calcular es la cota del valor absoluto de la derivada segunda en $[a,b]=[0,1]$. Para hacernos una idea la dibujamos:

```
[ > plot(abs((D@@2)(f)(x)), x=0..1);
```

[Con esta gráfica podemos ver que el máximo se alcanza en el 1, o sea:

```
[ > M:=abs((D@@2)(f)(1));
```

[También podemos usar la orden **maximize** vista en la práctica anterior:

```
[ > M:=maximize(abs((D@@2)(f)(x)), {x}, {x=0..1});
```

[Por tanto, la cota de error es:

```
[ > errormax:=evalf(M*(b-a)^3/(12*n^2));
```

Nota

Igual que en el caso del polinomio de Taylor, podríamos pensar de forma inversa: si queremos una aproximación con una precisión determinada, ¿en cuántos subintervalos debemos dividir $[a,b]$ para obtener dicha precisión? Es decir, ¿cuánto debe valer n para que el error sea menor que una cierta cantidad?

Ejemplo: En el mismo caso anterior, ¿cuánto debe valer n para que el error de la regla trapezoidal sea menor que 0.001? Obtener la aproximación en ese caso.

Para resolverlo usaremos la sentencia **while** vista en la práctica anterior. Primero tenemos que limpiar la variable n :

```
[ > n:='n';
```

Conocemos M y sabemos que el error es menor que la cantidad, que depende de n :

```
[ > error:=n->M*(b-a)^3/(12*n^2);
```

Ahora usamos el **while** para ir dando valores sucesivos a n y obtener cuándo error < 0.001 :

```
[ > n:=1:
  while evalf(error(n)) > 0.001 do
  n:=n+1:
  od:
```

Por tanto el valor de n necesario para tener un error menor que 0.001 es

```
[ > n;
```

Así que la aproximación buscada es:

```
[ > aprox0:= evalf(h*(f(a)/2 + sum(f(a+i*h), i=1..n-1) +
  f(b)/2));
```

