FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

INGENIERO TÉCNICO INDUSTRIAL

ESPECIALIDAD MECÁNICA

Práctica 3

Sucesiones y series numéricas

- **Sucesiones numéricas**

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de números naturales en el cuerpo de los reales:

$$a: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$
$$n \to a(n)=a_n$$

El conjunto de todas las imágenes se suele denotar como

$$\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- *Convergencia de sucesiones*

Una sucesión $\{a_n\}$ es ***convergente*** y su límite es l cuando los elementos de la sucesión se aproximan tanto como se quiera a l a partir de cierto índice n.
Se denota como

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

- *Ejemplos de sucesiones:*

$$\{1,1,1,1,...\} = \{1\} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \qquad \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \{0,1,0,1,...\}$$

Progresión aritmética de diferencia d: $\{a, a+d, a+2d, a+3d, ...\} = \{a+nd\}$

$$\lim_{n\to\infty} a + nd = \infty$$

o sea, diverge.

Progresión geométrica de razón r: $\{a, ar, ar^2, ar^3, ...\} = \{ar^n\}$

$$\lim_{n\to\infty} ar^n = \begin{cases} 0, & 0 < r < 1 \\ a, & r = 1 \\ \infty, & r > 1 \end{cases}$$

Sucesiones definidas a trozos:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{n}{n+1}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} n + \dfrac{3}{n}, & \text{si } n \text{ es múltiplo de 3} \\ \sqrt{\dfrac{2n}{n+1}}, & \text{si } n \text{ no es múltiplo de 3} \end{cases}$$

Sucesiones recurrentes:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad u_0 = 1,\ u_1 = 2,$$
$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}},\ \ n \geq 2. \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2},\ n \geq 2.$$

- *Cálculo de límites de sucesiones:*

Suma de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

indeterminación ∞-∞

Producto de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

indeterminación 0·∞

Cociente de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

indeterminaciones ∞/∞, 0/0

Potencia de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

indeterminaciones ∞^0, 0^0, 1^∞

- *Criterios de convergencia de sucesiones:*

Criterio de la media aritmética:

$$\text{Si } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l$$

Criterio de la media geométrica:

$$\text{Si } a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \text{ con } a_n > 0 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = l$$

Criterio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

si $\{b_n\}$ es de términos no nulos y estrictamente creciente a +∞.

- ## Series numéricas

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se define la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ como

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Dada una sucesión de números reales $\{a_n\}$, se llama ***serie*** al límite de la sucesión de sumas parciales de $\{a_n\}$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Si el límite existe y es finito se dice que la serie es *convergente*. En otro caso, se dice que es una serie *divergente*.

- *Ejemplos de series*:

Series geométricas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r}, & \text{si } |r| < 1 \text{ (convergente)} \\ \infty, & \text{si } |r| \geq 1 \text{ (divergente)} \end{cases}$$

Serie armónica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergente}$$

Series armónicas generalizadas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{si } \alpha > 1 \text{ es convergente} \\ \text{si } \alpha \leq 1 \text{ es divergente} \end{cases}$$

- *Criterios de convergencia de series:*

Criterio del límite:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente, entonces } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Criterio del cociente:

$$\text{Si } a_n \geq 0: \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} \text{si } L < 1, \sum a_n \text{ es convergente} \\ \text{si } L > 1, \sum a_n \text{ es divergente} \\ \text{si } L = 1, \text{ es dudoso} \end{cases}$$

Criterio de la raíz:

$$\text{Si } a_n \geq 0: \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} \text{si } L < 1, \sum a_n \text{ es convergente} \\ \text{si } L > 1, \sum a_n \text{ es divergente} \\ \text{si } L = 1, \text{ es dudoso} \end{cases}$$

Criterios de comparación:

$$\text{Si } a_n \geq 0, b_n \geq 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \infty \Rightarrow \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ tienen el mismo carácter}$$